RECENSIONE

G. Veronese — *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee*, ecc. Padova, 1891, pag. XLVIII-630.

« 1. **Penso.**

« 2. Penso **una cosa** o **più** cose.

« 3. Penso **prima** una cosa, **poi** una cosa » (*).

Così (pag. 1) incomincia il libro, col quale l'A. pone la matematica « in balìa nei suoi principî delle molteplici opinioni filosofiche che si disputano la verità » (pag. XIII).

Il libro ha una *introduzione*, di oltre 200 pagine, contenente le nozioni comuni (o principii di logica), il concetto di numero, una teoria dei numeri infinitesimi ed infiniti, ecc.

Esso si divide in due parti, l'una col titolo « La retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni nello spazio generale » e l'altra: « Lo spazio a quattro e a n dimensioni nello spazio generale ».

La prima osservazione che si presenta al lettore si riferisce alla lingua adoperata nel libro. Così a pag. 39 sta scritto:

« Def. I'. La sottrazione di un numero b da un altro numero c mag- « giore di b significa trovare un numero a tale che sommato a b dia c ».

Queste sgrammaticature, abituali all'autore, rendono assai difficile la lettura del libro, ed inintelligibili alcuni suoi punti. Vedasi ad es. l'ipotesi IV (pag. 92).

Lasciando in disparte le questioni metafisiche, mi limiterò ad un rapido esame dei fondamenti di queste teorie.

Riguardo alle nozioni comuni, a pag. 2, l'A. ammette due *principii necessarii*, di cui il secondo è *la negazione* (così dice l'A.) del primo; e il cui insieme quindi costituisce l'assurdo.

Riguardo al concetto di numero intero, l'A. usa a pag. 7 le parole *prima*, *seconda*, *terza*, ecc., mentrechè solo a pag. 26 si comincia a trattare il « primo concetto di numero ». Inoltre nella stessa pagina 7, dopo aver definito la serie A B C D ... N ... come ciò che si ottiene pensando prima ad A, poi a B, e così via, ammette (pag. 12) che la serie possa non avere un'ultima cosa, nè la prima, e (pag. 56) che fra due elementi consecutivi A e B vi siano altri elementi della serie stessa. Ora è chiaro che, secondo la definizione data, pensando prima ad A, poi a B, e così via, ogni persona avrà pensato un numero finito di oggetti quando afferma di avere

---

(*) Le frasi entro « » sono riprodotte, collo stesso carattere di stampa, dal libro in questione.

una serie; quindi, secondo la definizione data, la serie deve avere un ultimo elemento. Che le altre definizioni dell'A. siano in contraddizione colla definizione data, è cosa troppo evidente.

Riguardo infine al modo con cui l'A. tratta la teoria degli spazii a più dimensioni, ricorderò brevemente che, mentre la teoria analitica di questi spazii non presenta difficoltà di sorta, riducendosi allora questa teoria ad un cambiamento di nomi ad enti algebrici, la teoria geometrica o sintetica, ove si considerino i punti dell'iperspazio tali e quali quelli dello spazio ordinario, dà luogo a difficoltà, esigendosi allora un numero di postulati maggiore di quelli richiesti per la geometria ordinaria. Dopo la discussione su questo soggetto, nella *Rivista di Matematica*, vol. I, pag. 66 e 154, l'egregio prof. Amodeo, in un suo articolo (*), trattò siffatta questione in modo chiaro e rigoroso. Risulta da questa teoria che il numero dei postulati necessari per stabilire la teoria degli spazii a più dimensioni, è illimitato, ossia è attualmente infinito.

Invece il prof. Veronese non parte da alcun postulato, ma si basa sul principio fondamentale del N. 37, « sul quale principio » dice l'A. a pagina 457 « ha il suo appoggio la nostra definizione dello spazio generale ». Esso è (pag. 13)

« *a*) *Data una cosa* A, *determinata, se non è stabilito che* A *è il gruppo* « *di tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne* « *un'altra non contenuta in* A (*vale a dire fuori di* A) *e indipendente* « *da* A »,

che a mio modo di vedere significa:

Data una classe A, *se essa non contiene tutti gli oggetti, allora essa non contiene tutti gli oggetti.*

Da questa proposizione l'A., con logica nuova, sopprime la condizione che la classe non contenga tutti gli oggetti, e deduce la *a'* (pag. 14)

« *La serie delle cose che si ottiene ponendo una cosa* B *fuori di* « *un'altra* A, *una cosa* C *fuori del gruppo* AB, *e così via, è illimitata.* « Perchè supposto che si ottenga un ultimo gruppo A, si può immaginare « un'altra cosa B fuori di A (*a*) ».

Le conseguenze di questo principio assurdo sono evidenti.

Così (pag. 85), fuori di tutti i numeri sonvi ancora dei numeri, e in tal modo si generano gli infiniti; e (pag. 211) fuori di tutti i punti sonvi ancora dei punti, e per tal via si generano gli spazii a più dimensioni!

E si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro tolgono ad esso ogni valore.

G. Peano.

(*) *Quali possono essere i postulati fondamentali della Geometria proiettiva di uno* S_r. Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXVI, pag. 741-770.